数理解析研究所講究録
937巻 1996年 35-38

Turrittinの常微分方程式と $\bar{\partial}_b$作用素及びSzegö核の実解析性の崩壊

神本 丈 (大阪大学)

1 Introduction

次のよく似た2つの退化楕円型微分作用素には,準楕円性に関して大きな違いがある.

$$L_1 := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^2$$

$$L_2 := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^3$$

L_1 と L_2は, 双方ともHörmanderの有限型の条件[5]を満たしており, C^∞ 準楕円性を持つ. しかし, 実解析的な意味においては L_1は準楕円性を持つが(F.Trèves[10]), L_2はそうではない(M.S.Baouendi-C.Goulaouic[1]). 奇妙に思われる L_2のような作用素は, 現在までのところ本質的にいくつかの例でしか知られていない. 我々の掲げる大きな目標は, このようなタイプの作用素について, 実解析的準楕円性の壊れるためのより一般的な条件を与えることにある. また, 複素解析学における興味として, 有限型領域のBergman核及びSzegö核の実解析性に関する問題は, 上で述べた現象と深く関連している. この講演ではこのような現象がどのようにして起こるのか, その要因をChrist-Gellerの発見した反例に関して模索する.

2 Christ-Gellerの反例と我々の考える問題

我々はChrist-Geller([4])によって発見された次の反例について考える.

定理 1 *3*次元 *CR* 多様体 $M := \{\mathrm{Im} z_2 = [\mathrm{Re} z_1]^{2m}\}$ $(m = 2, 3, \ldots)$ 上, $\bar{\partial}_b$ は実解析的に準楕円性を持たない.

•注意 1• 定理1にある準楕円性の意味はJ.J.Kohnにより修正されたもので, 関数空間を $\bar{\partial}_b^*$ ($\bar{\partial}_b$ の随伴作用素 in $L^2(M)$) の値域に制限して考える. この意味では, M 上 $\bar{\partial}_b$ は C^∞準楕円性を持つ(Kohn [6]).

•注意 2• Mは (D'Angelo の意味での) 有限型弱擬凸領域の境界である.

•注意 3• 一般に強擬凸性を仮定したとき，2n-1 次元実解析的 CR 多様体上$\bar{\partial}_b$は実解析的に準楕円性を持つ (Kohn).

Christ-Geller は定理 1 の証明について$\bar{\partial}_b u = 0$の解として Szegö 核を考え, 次を示すことにより特異解の存在を示している.

定理 2 Mの Szegö 核は対角線集合以外において実解析的でない.

•注意 4• Mの Szegö 核は対角線集合以外においてC^∞級には滑らかである ([8]).

•注意 5• 一般に非有界な model 領域 $\{\mathrm{Im} z_2 > P(z_1)\}$ の境界に関して，強擬凸の場合 (i.e.$\triangle P > 0$) は対角線集合以外は実解析的になる (Kang).

•注意 6• Bergman 核に関しても同様な事実が成り立つ.

C-G の証明 Nagel([7]) により計算されたMの Szegö 核の積分表示に注目し，その中に現れる整関数

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^{2m}+xw} dw \quad (x \in \mathbf{C})$$

の零点の存在に関する背理法によるものである.

彼らの証明は論理的には解り易いものの 特異性の様子が解りにくい. そこで我々は次の問題について考えたい.

問題 1 $\bar{\partial}_b u = 0$ の特異解を直接的に構成せよ.

問題 2 Szegö 核の対角線集合以外の特異性を取り出せ.

M.Christ の議論 ([2],[3]) によれば，上の問題は次の問題に帰着される.

問題 3 φ の ∞ での挙動及び零点に関して詳しく調べよ.

M.Christ は実解析性の崩壊に関する多くの結果を得ているが ([3] の参考文献を参照)，彼の議論の興味深い点は，関数φ (またはそれにあたる関数) を浮かび上がらせて，その性質から解や Szegö 核の特異性の存在や性質を調べているところである. 我々はさらに詳しくφ を解析することによって，実解析性の壊れる様子をより明確に知りたい.

3 φ の解析

φ に関して Christ-Geller はその指数位数を得ている. 我々はφ が ∞ を不確定特異点に持つある常微分方程式を満たすことに気付き，古典的な方法による解析を行うことで問題 3 に関して詳しい結果を得ることができた.

その方程式は Turrittin の方程式

$$\frac{d^k y}{dx^k} - x^v y = 0 \quad (v \in \mathbf{C}) \tag{1}$$

の特別な場合 $(k=2m-1, v=1)$ である．ただし，定数は無視する．

(1) の解について，例えば $k=2, v\in\mathbf{Q}$ のとき，その解は Bessel 関数で表され．特に $k=2, v=1$ のときは Airy 関数となる．(1) の解析の難しさは高階まで考える点にある．

(1) の研究について，接続問題や固有値問題に関するものは古くから (特に 1950 年以降) 行われている (Turrittin[11], Wright, Heading, Braaksma, McLeod, etc.)．最近では WKB 解析によるアプローチから興味深い研究が行われている (例えば大山氏 [9] $k=3, v\in\mathrm{N}$)．

我々はφ に関して鞍点法を使って ∞ での漸近展開及び Stokes 係数の決定を行い，さらに変形 Bessel 関数 $(I_\nu, \nu=0,1,2,\ldots)$ による展開を行うことで，その零点の漸近分布を調べた．その結果，φ は I_0と非常に似た性質を持つことが解った．すなわち，$\arg x=\pm\frac{\pi}{2}$ において Stokes line が存在し，その上に一位の零点が分布している (図 1,2)．さらに詳しく指数位数と零点の収束指数は双方ともに$\frac{2m}{2m-1}$である．

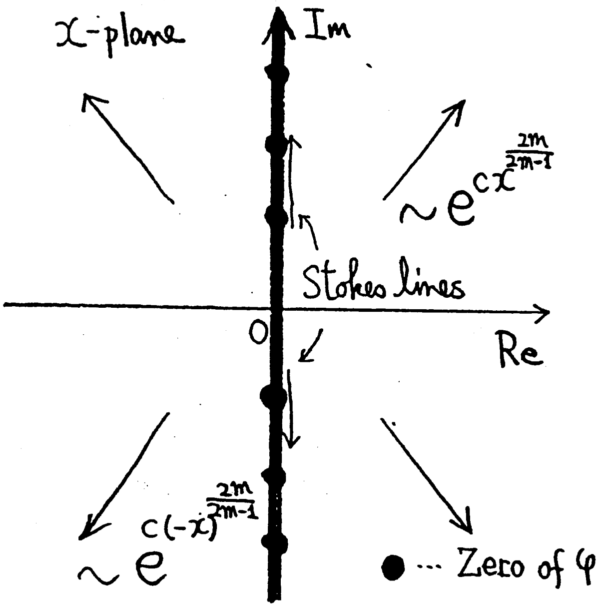

図 1.

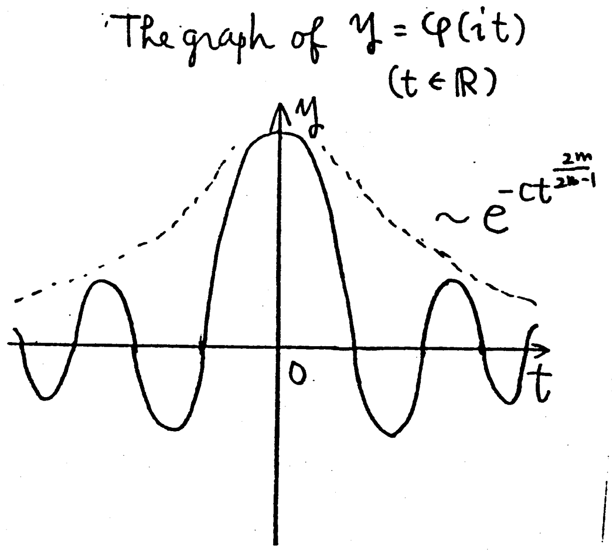

図 2.

4 まとめ

§3 において行ったφ の解析から，我々は問題 1,2 に関してひとつの解答を与えることができる．問題 1,2 と 3 の間にある議論のギャップは，Christ の研究 ([3]) を参照して頂きたい．

以上，我々の考えた Christ-Geller の反例に関して実解析性の崩壊はある意味で，方程式 (1) の Stokes 現象により引き起こされることが解る．実際，$m=1$ のとき φ は Gauss 関数 $(e^{\frac{x^2}{4}})$ であり Stokes 現象が起こらない．より一般な場合を考える際も，φ にあたる特殊関数を見い出すことができれば，同様な議論を行うことができるであろう．その問題は Nagel の計算 ([7]) を見ると，考える CR 多様体の幾何学的な性質に強く関連していて難しいように思われる．

参考文献

[1] M. S. Baouendi and C. Goulauic, *Nonanalytic-hypoellipticity for some degenerate elliptic operators*, Bulletin AMS **78** (1972), 483-486.

[2] M. Christ, *Analytic hypoellipticity breaks down for weakly pseudoconvex Reinhardt domains*, International Math. Research Notices **1** (1991), 31-40.

[3] M. Christ, *Remarks on the breakdown of analyticity for $\bar{\partial}_b$ and Szegö kernals*, Proceedings of 1990 Sendai conference on harmonic analysis (S. Igari, ed.), Lecture Notes in Math. Springer, 61-78.

[4] M. Christ and D. Geller, *Counterexamples to analytic hypoellipticity for domains of finite type*, Analls of Math. **235** (1992),551-566.

[5] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[6] J. J. Kohn, *Estimates for $\bar{\partial}_b$ on pseudoconvex CR manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. **43** (1985), 207-217.

[7] A. Nagel, *Vector fields and nonisotropic metrics*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, (E. M. Stein, ed.), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, 241-306.

[8] A. Nagel, J. P. Rosay, E. M. Stein and S. Wainger, *Estimates for the Bergman and Szegö kernels in certain weakly pseudoconvex domains*, Bull of A.M.S. **18** (1988), 55-59.

[9] Y. Ohyama, personal communications.

[10] F. Trèves, *Analytic hypo-ellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and applications to the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Comm. Partial Differential Equations **13** (1978), 475-642.

[11] H. L. Turrittin, *Stokes multipliers for an n-th order linear ordinary differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 304-329.